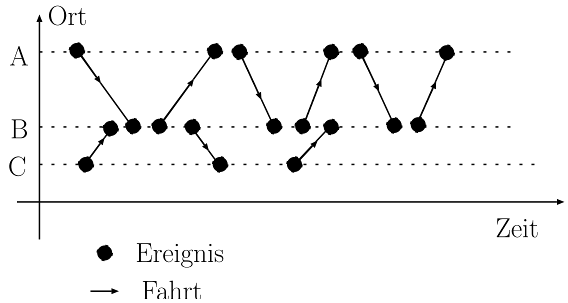
Optimierung von Wagenumläufen

Das mathematische Modell

Das Modell basiert auf Ideen der Graphentheorie und der Topologie. In diesem Modell werden auf Grundlage des vorgegebenen Abfahrts- und Ankunftsplans für jeden einzelnen Bahnhof **Ereignisse** definiert. Ein Ereignis ist ein **Knoten** $P(X,t)$ bestehend aus einem Ort X (Bahnhof) und einem Zeitpunkt t. Für jeden Bahnhof X ist eine Menge von Zeitpunkten vorgeschrieben, an denen ein Ereignis stattfindet (ein Ereignis kann entweder eine Abfahrt oder eine Ankunft sein). Ereignisse können durch **Fahrten** verbunden werden, das sind **gerichtete Kanten** innerhalb des Graphen (Graphik)



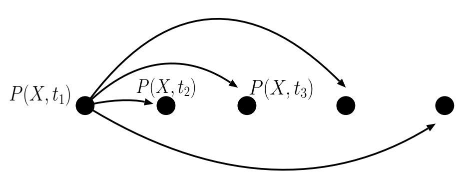
Wir bezeichnen eine gerichtete Kante, die die Ereignisse von $P(X,t)$ nach $P(Y,t)$ verbindet mit dem Paar $v = (P(X,t), P(Y,s))$.

Bekannte vs. unbekannte Fahrten

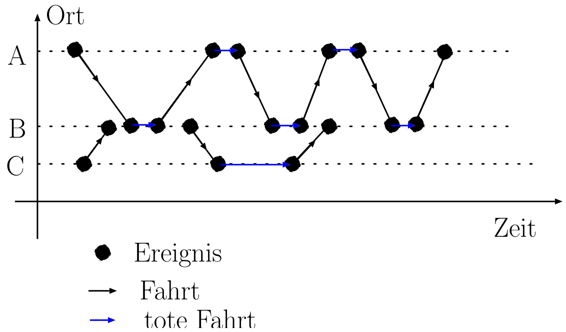
Ein gegebener Fahrplan gibt uns Fahrten vor, die zu fahren sind. Diese Fahrten bezeichnen wir als bekannte Verbindungen. Sie bilden die Menge V_b . Dazu können sowohl echte Fahrten als auch tote Fahrten zählen. Zusammen mit der Menge E der Ereignisse ist der Graph G_0 des gegebenen Fahrplans beschrieben durch das Paar

$$G_0 = (V_b, E)$$

Die Verknüpfung dieser Fahrten sind Fahrten, die von uns anzugeben sind. Wir bezeichnen die Menge der unbekannten Fahrten mit V_u. Die Menge der unbekannten Fahrten ist sehr viel grösser als die Menge der bekannten Fahrten, da es viele Möglichkeiten gibt, zwei Fahrten miteinander zu verbinden.



Um einen sinnvollen Wagenumlauf zu planen, sind Verknüpfungen unter den einzelnen Fahrten einzufügen. Diese Verknüpfungen sind ihrerseits gerichtete Kanten zwischen Ereignissen und bezeichnen wir als "tote Fahrten". Das heisst, der Zug bewegt sich nicht und wartet auf das neü Ereignis.



In unserer Problemstellung ist der vorgegebene Fahrplan ein gerichteter Graph bestehend aus Ereignissen (Knoten) und aus Fahrten (Kanten).

Summen von Fahrten und deren Ränder

Verschiedene Fahrten oder verschiedene Ereignisse werden zusammengefasst, indem sie formal addiert werden. Zum Beispiel ist die Zusammenfassung der Fahrt $v_1$von Ereignis A nach B und der Fahrt v_2 von Ereignis B nach C formal

$$v_1 + v_2$$

(Es sei darauf hingeweisen, dass es sich hier um eine formale Addition handelt, so wie sie für simpliziale Komplexe benutzt wird, und nicht um die vektorielle Addition!) Werden mehrere durchindizierte Fahrten zusammengefasst, so benutzt man das Summensymbol

$$\sum_{i=1}^{n} v_i$$

Der **Rand** ∂v einer Fahrt v ist definiert als die **Summe der Ereignisse mit Vorzeichen**, die durch v verbunden werden

$$\partial v = P(X,t) + (-P(Y,s)) = P(X,t) - P(Y,s)$$

das heisst, wenn v $P(X,t)$ und $P(Y,t)$ verbindet, dann ist der Rand das Ankunftsereignis Minus dem Abfahrtsereignis.

Beispiel

1. Eine“leere” Fahrt v, die das Ereignis P mit sich selbst verbindet, hat keinen Rand $\partial v = P - P = 0$.
2. Zwei Fahrten v_1, v_2 die Ereignisse P und Q ($v_1 = (P,Q)$) beziehungsweise R und Q ($v_2 = (Q,R)$) verbinden. Der Rand $\partial(v_1 + v_2) = \partial v_1 + \partial v_2 = Q - P + R - Q = R - P$
3. Zwei Fahrten v_1, v_2 die Ereignisse P und Q ($v_1 = (P,Q)$) beziehungsweise R und Q ($v_2 = (R,Q)$) verbinden. Der Rand $\partial(v_1 + v_2) = \partial v_1 + \partial v_2 = Q - P + Q - R = 2Q - P - R$
4. Zwei Fahrten v_1, v_2 die Ereignisse P und Q ($v_1 = (P,Q)$) beziehungsweise R und Q ($v_2 = (P,R)$) verbinden. Der Rand $\partial(v_1 + v_2) = \partial v_1 + \partial v_2 = Q - P + R - P = Q + R - 2R$

Der Zeitprojektor

Unter einem Zeitprojektor verstehen wir eine Funktion $\pi_{zeit} : E \to \mathbb{R}_+$auf der Menge der Ereignisse, die jedem Ereignis den Zeitpunkt zuordnet, zu welchem dieses Ereignis stattfindet

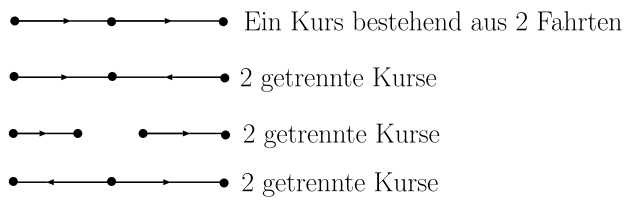
$$\pi_{zeit}(P(X,t)) = t$$

Die Summe/Differenz von zwei Ereignissen $P(X,t)$ und $P(Y,s)$ ist gleich der Summe/Differenz der Zeitpunkte

$$\pi_{zeit}(P(X,t) \pm P(Y,s)) = \pi_{zeit}(P(x,t)) \pm \pi_{zeit}(P(Y,s)) = t \pm s$$

Kurse

Als Kurse bezeichnen wir hintereinander ausgeführte Fahrten (echte+tote). Das heisst, ein Kurs betsehend aus einer Abfolge von Ereignissen, die durch gerichtete Kanten <u>ohne Lücken</u> verbunden sind. Dabei ändert sich die Richtung des Durchlaufs nicht!



Die Idee hinter dieser Definition ist, dass ein Zug im Laufe der Zeit einen ganz bestimmten Weg zurücklegt. er durchläuft eine Folge von Fahrten. **Ein Kurs ist somit der Fahrplan für einen einzigen Zug**.

<u>**Folgerung**</u> Eine Summe von Fahrten $k = \sum_{i=1}^{n} v_i$ ist also genau dann ein Kurs, wenn gilt $\partial k = P(X,t) - P(Y,s)$. Das heisst, dass eine Zusammenfassung von Fahrten genau dann ein Kurs ist, wenn es **genau eine Abfahrt und genau eine Ankunft gibt**.

<u>**Beweis:**</u> Ist k ein Kurs, so gibt es Ereignisse $(P(X_i, t_i))_{1 \le i \le n}$, welche die $(v_i)_{1 \le i \le n-1}$ verbinden. Also ist $\partial k = \sum_{i=1}^{n} \partial k = \sum_{i=1}^{n} P(X_i, t_i) - P(X_{i-1}, t_{i-1}) = P(X_n, t_n) - P(X_0, t_0)$. Umgekehrt überlegt man sich leicht, dass k ein Kurs ist, wenn $\partial k = P(X,t) - P(Y,s)$ gilt (siehe Beispiele).

Disjunkte Kurse

Zwei Kurse $k_1 = \sum_{i=1}^{n} v_i^1$ und $k_2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2$ heissen **disjunkt**, wenn sie **keine Fahrten gemeinsam haben**:

$$\forall\, 1 \le i \le \min\{n, m\} :\, v_i^1 \neq v_i^2$$

Diese Definition sichert, dass zwei Züge nicht dieselbe Fahrt antreten.

Vollständige Kurspläne

Ein Kursplan ist eine Summe von disjunkten Kursen $K = \sum_{i \in I} k_i$, wobei I die Indexmenge der Kurse bezeichnet, und $k_i = \sum_{j=1}^{n_i} v_j^i$. Die Anzahl der disjunkten Kurse ist gleich der Anzahl $\#I$ der Elemente von I. Um sicher zu gehen, dass alle vorgegebenen Fahrten auch gefahren werden, müssen wir bei der Planung voraussetzen, dass für jede obligatorische Fahrt genau ein Zug bereit gestellt wird. Das heisst, es muss genau einen Kurs geben, der diese Fahrt auch enthält. Die Summe dieser Kurse nennen wir **vollständig**.
Formal: Der Kursplan K ist vollständig, genau dann wenn gilt

$$\forall\, v \in V_b : \exists\, i \in I : \exists\, j :\, v_j^i = v$$

Problemstellung (einfache Form mit einem Zugtyp)

Sei $\mathcal{M}$ die Menge der disjunkten vollständigen Kurspläne. Das Minimumproblem des Wagenumlaufes lautet

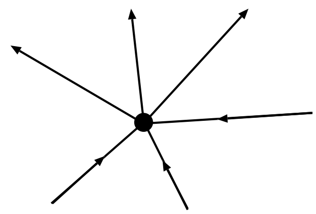
$$n_{min} = \min\{\#I :\, K = \sum_{i \in I} k_i \wedge K \in \mathcal{M}\}$$

Das heisst, wir suchen die kleinste natürliche Zahl n_{min} von Zügen, die nötig ist, um einen Fahrplan zu bedienen. Zur Beantwortung dieser Frage benötigen wir noch ein paar Begriffe

Der Index von Knoten, Quellen und Senken

In gerichteten Graphen lässt sich jedem Knoten κ eine ganze Zahl $ind(\kappa)$ zuordnen, genannt der **Index des Knoten** κ. Der Index eines Knoten ist definiert als die Anzahl der fortlaufenden Pfeile minus die Anzahl der ankommenden Pfeile:

$$\mathrm{ind}(\kappa) = \sharp\{\text{aus } \kappa \text{ fortlaufende Pfeile}\} - \sharp\{\text{aus } \kappa \text{ einlaufende Pfeile}\}$$



In der Graphik ist der Index des Knotens 0, da auf drei auslaufenden Pfeile 3 einlaufende Pfeile kommen.
Eine**Senke** in einem gerichteten Graphen ist ein Knoten mit **negativem Index**. Eine **Qülle** ist ein Knoten mit **positivem Index**.

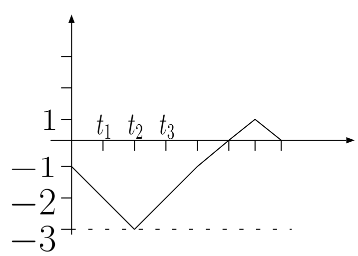
Der Tagesbedarf eines Bahnhofes

Für unser Problem ist es sinnvoll, gewisse Knotenpunkte zu vergleichen. Zum Beispiel sind wir daran interessiert, herauszufinden, wieviele Züge Bahnhof X im Laufe eines Tage verlassen müssen und wieviele diesen Bahnhof anfahren. In unserem Modell betrachten wir die Menge $\mathcal{E}_T(X)$ alle Ereignisse des Bahnhofes X in einer Tagesperiode T. Um jeden Tag einen reibungslosen Ablauf zu garantieren, ist notwendigerweise

$$\sum_{P \in \mathcal{E}_T(X)} ind(P) = 0$$

das heisst, es gibt während am Ende des Tages genauso viele Züge im Depot wie zu Beginn des Tages. Der **Tagesbedarf** $\beta_T(X)$ des Bahnhofes X ist also gegeben durch

$$\beta_T(X) = -\min\{\sum_{i=1}^{k} ind(P_i) : (P_i)_{1\leq i\leq m} \subseteq \mathcal{E}_T(X), 1 \leq k \leq m\}$$



Wir erhalten somit für unser Problem folgende Liste

Bhf	Innichen	Franzensfeste	Bozen	Meran	Mals	$\sum$
Bedarf	2	2	1	4	3	12

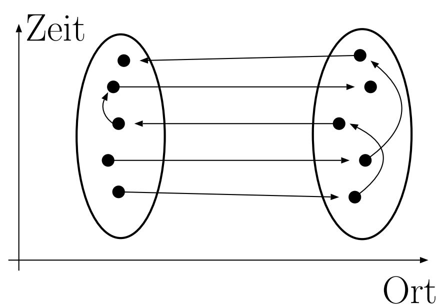
Existenz eines optimalen vollständigen Kursplans

Ein Kursplan, der mit der nötigen Anzahl von Zügen auskommt, die sich aus dem Tagesbedarf jedes einzelnen Bahnhofs ergibt, ist ein **optimaler** Kursplan. In unserem Fall suchen wir also einen vollständigen Kursplan mit 14 Zügen. Der Beweis der Existenz eines solchen Kursplans ist der Schritt dorthin.

Um den Beweis zu vereinfachen, nehmen wir an, dass wir nur zwei Bahnhöfe bedienen. Dazu fassen wir für je zwei Bahnhöfe X, Y, die durch mindestens eine Fahrt verbunden werden, solche Ereignisse zusammen, die Ankünfte oder Abfahrten von direkten Zugverbindungen sind. Seien $E(X)$ und $E(Y)$ die Mengen der Ereignisse in Bahnhof X und Y, die direkt über echte Fahrten verbunden sind. Seien $E^-(X)$ beziehungsweise $E^+(X)$ die Mengen der Abfahrtsereignisse/Ankunftsereignisse nach/von Y. ähnlich definieren $E^-(Y)$, $E^+(Y)$. Nach Voraussetzung ist $\sum_{P \in E^-(X) \cup E^+(X)} ind(P) = 0$ bzw. $\sum_{P \in E^-(Y) \cup E^+(Y)} ind(P) = 0$. Da jeder Knoten P entweder Index -1 oder $+1$ hat, ist also

$$\begin{aligned} \#E^-(X) &= \#E^+(X) \\ \#E^-(Y) &= \#E^+(Y) \end{aligned}$$

Jeder Knoten in $E^+(X)$ wird nun mit einem Knoten aus $E^-(X)$ verbunden beziehungsweise jeder Knoten in $E^+(Y)$ mit einem Knoten aus $E^-(X)$. Da wir an chronologisch sinnvollen Verbindungen interessiert sind, wählen wir nur solche Verbindungen, die zeitlich Sinn haben. Durch Zusammenfassen der Verbindungen erhalten wir eine Menge von Kursen, die alle zu fahrenden Fahrten bedienen.



Ein optimaler Kursplan mit 2 Kurse

Optimale vollständige Kurspläne unter Nebenbedingungen

Züge müssen gewartet werden. Im Normalfall bedarf ein Zug alle 14 bis 16 Tage einer Wartung, die ca. 24 Stunden daürt. Wartungen werden im Südtiroler Streckennetz im Depot Meran vollzogen. In unserem Modell wird die **Wartung als zusäztlicher Bahnhof mit vorgegebener Wartungsdaür** eingebunden. In der Sprache der Graphentheorie handelt es sich dabei um zwei Ereignisse im Bahnhof "Wartung", nämlich die Ankunft bei Wartungsanfang und die Abfahrt bei Wartungsende. Der Verbleib des Zuges in der Wartung ist somit eine tote Fahrt zwischen beiden Ereignissen. Ein Zug, der sich in der Wartung befindet, kann das übrige Streckennetz nicht bedienen. Damit erhöht sich die Anzahl der effektiv zirkulierenden Züge mindestens um 1, also auf insgesamt 13 Züge.

Das Problem, das sich dabei stellt, ist, einen optimalen vollständigen Kursplan zu erstellen, in welchem in einem Zeitraum von 14-16 Tagen jeder Zug einmal gewartet wird.

Eine weitere Nebenbedingung, die zu berücksichtigen ist, ist die **Pufferzeit** pro Zug in jedem Bahnhof. Diese Bedingung kann so formuliert werden, dass tote Fahrten eine vorgegebene Schranke p_t zeitmässig nicht unterschreiten dürfen. Das heisst, wir verlangen, dass in jedem Kurs $k = \sum_{i=1}^{n} v_i$ die Verbindungen $v_i \in V_u$, die zwei Ereignisse $P(X,t)$ und $P(X,s)$ (gleicher Bahnhof!) verbinden, folgende Bedingung erfüllen

$$|\pi_{zeit}(\partial v_i)| = |t - s| \geq p_t$$

Diese Beschränkung erzwingt im Extremfall, dass nächstmögliche Abfahrtszeiten im Zeitplan des Bahnhofs X übersprungen werden müssen. Die Existenz von optimalen Kursplänen hängt davon ab, wieviele Ausweichmöglichkeiten vorhanden sind, das heisst, wieviele Fahrten am Tag unternommen werden.

Lösungsmethode

Die Anzahl der Kurse in einem vollständigen Kursplan ist unter Nebenbedingungen zu minimieren. Die Menge der zulässigen Kursplänen bezeichnen wir wieder mit $\mathcal{M}$. Dazu führen wir folgende Kostenfunktion ein: Sei $c : V_u \cup V_b \to \mathbb{R}_+$ eine Funktion auf der Menge der unbekannten Fahrten definiert durch

$$c(v) = \begin{cases} \pi_{zeit}(\partial v) & , v \in V_u \\ 0 & , v \in V_b \end{cases}$$

das heisst, die Funktion c misst die Daür einer toten Fahrt. Die Kostenfunktion c ist additiv auf Kursen, das heisst die Daür der toten Fahrten pro Kurs $k = \sum_{i=1}^{n} v_i$ wird addiert.

$$c(\sum_{i=1}^{n} v_i) = c(\sum_{v_i \in V_u} v_i) = \sum_{v_i \in V_u} c(v_i)$$

Wir wollen das folgende Minimalproblem lösen

$$\lambda = \min\{c(k) : k \in \mathcal{M}\}$$

Lösungen für diese Problem gehorchen dem Prinzip “Standzeiten Verkürzen”. Die Behauptung ist, dass Lösungen für das obige Minimalproblem Lösungen für das Problem

$$n_{min} = \min\{\#I :\ K = \sum_{i \in I} k_i \wedge K \in \mathcal{M}\}$$

sind.

Lösungsmethode

Für jeden Bahnhof X wird das chronologisch erste Ereignis mit Index -1 bestimmt (die Abfahrt). Dieses Ereignis ist jeweils der Anfang eines Kurses. Das Ereignis am Ende der Fahrt (Ankunft) wird jeweils mit dem chronologisch nächstmöglichen Ereignis verbunden, das nicht kleiner als die Pufferzeit entfernt ist. So fortlaufend erhalten wir einen Kurs, der am Ende eines Tagesfahrplans endet. Nach diesem Vorgehen erhalten wir einen Kursplan $K = \sum_{i \in I} k_i$ bestehend aus Kursen k_i, die lokal jeweils die Standzeit verkürzen. Die Anzahl der Kurse ist gleich der Summe der Tagesbedarfe:

$$\#I = \sum_{j \in J} \beta_T(X_j)$$

Sei $\tilde{K} = \sum_{l \in L} \tilde{k}_l$ Minimum für $n_{min} = \min\{\#I :\ K = \sum_{i \in I} k_i \wedge K \in \mathcal{M}\}$. Wir können annehmen, dass $\#L = \#I$. Es gilt

$$c(\tilde{K}) \leq c(K) = c(\sum_{i \in I} k_i) = \sum_{i \in I} c(k_i) = \sum_{i \in I} \sum_{v_j^i \in V_u} c(v_j^i) \leq \sum_{l \in L} \sum_{v_j^l \in V_u} c(v_j^l) = \sum_{l \in L} \sum_{v_j^l \in V_u} c(\tilde{v}_j^l) = c(\tilde{K})$$